MATEMATICHE

FASCICOLO QUARTO

TEMI D'ARITMETICA

TEMI

D'ARITMETICA

PER USO

Della Studiosa Gioventù

FASCICOLO QUARTO

PISA

Presso Ranieri Prosperi

Tipografo della I. e R. Università

1840.

TEMA QUARTO

Frazioni decimali, loro principali proprietà, prime trè Operazioni dirette ed inverse sulle medesime; e traduzione approssimativa od esatta delle frazioni ordinarie in decimali.

§. I.

Frazioni decimali, loro principali proprietà, e prime trè Operazioni dirette ed inverse sulle medesime.

1. Sebbene si possano, come abbiamo veduto nel precedente Tema, praticare nel senso ivi definito (§. II) sù i numeri rotti, o sulle frazioni di qualunque specie le medesime operazioni, dirette ed inverse, di quelle, che rapporto ai numeri intieri si sono chiamate cogli stessi nomi, ciononostante, nel caso specialmente dell' Addizione e della Sottrazione di più frazioni di specie diversa trà loro, la necessità di ridurle prima alla specie medesima, ossia al medesimo denominatore, c' impegna quasi sempre in un calcolo accessorio, che riesce

alquanto imbarazzante, e nuoce alla semplicità de' resultati.

Per evitare un tale inconveniente, e rendere le operazioni spedite quanto è mai possibile, nell' uso, che dobbiamo far delle frazioni, si è sentito il bisogno di preferir quella specie, che fosse la più atta a soddisfare alle due seguenti condizioni, cioè

1.ª Che la loro riduzione al medesimo denominatore si facesse con facilità estrema, e nello stesso tempo egli resultasse il più piccolo possibile (Tema prec. §. I. num. 9.)

2.ª Che le operazioni da farsi poi sulle trasformate si eseguissero in un modo analogo a quello praticato su i numeri intieri, e dipendente dal nostro Sistema di Numerazione fin da principio stabilito (Temi primo e secondo, §§. II).

Alla prima di queste condizioni soddisfanno mirabilmente quelle frazioni, i numeratori delle quali essendo numeri intieri qualunque, i denominatori sono precisamente la unità seguìta da uno o più zeri, giacchè allora collo scriver soltanto degli zeri di seguito al denominatore di una frazione, che lo avesse più piccolo, ed altrettanti al numeratore, si ha una trasformata equivalente del denominatore medesimo di un' altra, che lo avesse più grande.

Alla seconda condizione poi si soddisfarebbe col sopprimer nelle nuove frazioni il denominatore comune, purchè *ciascun nuovo numeratore si riferisse mentalmente ad un altro numero sottinteso, che fosse il quoziente del primitivo diviso pel denominatore soppresso*.

Così delle due frazioni per es. $\frac{7}{10}$, $\frac{117}{1000}$ la prima si riduce immediatamente al medesimo denominatore della seconda scrivendo di seguito a' suoi termini due zeri soltanto; e sopprimendo poi il denominatore comune ad ambedue 1000, non si avrebbe, che a considerare i due numeratori 700, 117.

Quindi è, che in seguito preferiremo sempre nelle applicazioni, che ne faremo, coteste frazioni a quelle di ogni altra specie.

2. Ma volendo conservar sempre intatto il numero sottinteso, e nello stesso tempo risparmiarci anco la riduzione delle nostre frazioni al medesimo denominatore, noi adotteremo alcune convenzioni per scriverle in un altro modo, anche più conciso.

A quest' oggetto riflettendo, che collo scrivere a *destra* di una cifra significativa, per esempio 1, uno, due, trè,... zeri si hanno l' espressioni o caratteristiche 10, 100, 1000,..., il *valor* delle quali è *dieci*, *cento*, *mille*,... volte respettivamente *maggiore* di quello di 1, si può in primo luogo convenire, che per rappresentare l'*espressioni inverse*, ossia le frazioni $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, . . ., il *valor* delle quali è al contrario *dieci*, *cento*, *mille*,... volte respettivamente *minore* di quello della medesima cifra 1, debbasi scrivere uno, due, trè,... zeri non più a destra, ma a *sinistra* di lei. Allora per rappresentare in altro modo codeste frazioni avremo le *caratteristiche inverse* 01, 001, 0001,..., che sono i respettivi loro denominatori scritti alla rovescia.

Ma per non confondere il *valore* di tali caratteristiche con quello della stessa cifra 1, che per le convenzioni in addietro stabilite (Tema primo, pag. 25) dovrebbe esser pur lo stesso, noi aggiungeremo loro un segno di distinzione.

Osservando, che con cotesto modo di scrivere si vuole, che la cifra 1 acquisti un valore *dieci in dieci* volte più piccolo, a misura ch' è scritta un posto più lontana a destra dal primo zero, così marcando questo zero, per esempio con una virgola in fianco, si può in secondo luogo convenire, che l' ultima cifra 1 nelle nuove caratteristiche abbia un *valore dieci*, *cento*, *mille* volte *minore*, secondochè vi occupa respettivamente il primo, secondo, terzo, . . posto dopo cotesto zero marcato.

Così a preferenza delle caratteristiche precedenti scriveremo queste altre 0, 1; 0,01; 0,001;.. le quali perciò si leggeranno respettivamente *un-decimo*, *un-centesimo*, *un-millesimo*, . . come le frazioni ch' esse rappresentano.

Ciò, che abbiamo detto per rapporto alla cifra elementare 1, referendosi a qualunque altra cifra significativa, che servisse essa sola di numeratore ad una delle nostre frazioni, in luogo per esempio delle trè frazioni $\frac{3}{10}$ $\frac{7}{100}$ $\frac{9}{1000}$ si potranno respettivamente scrivere le trè caratteristiche 0,3; 0,07; 0,009, le quali si leggeranno pure *trè-decimi*, *sette-centesimi*, *nove-millesimi* respettivamente.

Se per conformarci all' uso, piuttostochè in fianco al primo zero, si scrive una virgola tramezzo a lui, e le altre cifre, che seguono a destra, qualunque esse siano, e si conviene, che ciascuna di queste esprima de' *decimi*, de' *centesimi*, de' *millesimi*,... secondochè occupa dopo una tal virgola il primo, secondo, terzo, . . posto respettivamente, la caratteristica per esempio 0,379 potrà servire a denotare il *complesso*, o la somma delle trè frazioni precedenti, ossia la frazione unica $\frac{379}{1000}$ (Tema prec. pag. 44); e perciò cotesta caratteristica si leggerà *trecento settantanove-millesimi*.

In generale una qualunqne delle nostre frazioni, che sia *propria*, e che abbia al numeratore tante cifre, quanti zeri hà il denominatore, secondo le nostre convenzioni si rappresenterà scrivendo coteste stesse cifre soltanto, ma con uno zero di più a sinistra separato da una virgola; e la caratteristica resultante si enuncierà, o leggerà, come si legge cotesta frazione.

Nel caso particolare, che le cifre del numeratore in una delle nostre frazioni fossero meno degli zeri del denominatore, allora scrivendo loro a sinistra tanti zeri, quanti bastano, ciocchè si può (Tema primo, pag. 25), il nuovo numeratore con un' altro zero a sinistra, separato da una virgola, rappresenterebbe allora la frazione proposta.

Così in luogo per esempio delle trè frazioni $\frac{7}{100}$, $\frac{57}{10000}$, $\frac{701}{1000000}$, scrivendosi queste altre $\frac{07}{100}$ $\frac{0057}{10000}$, $\frac{000701}{1000000}$, si avranno le trè caratteristiche 0,07; 0,0057; 0,000701, le quali si enuncieranno respettivamente *sette-centesimi*, *cinquanta-sette-diecimillesimi*, *settecentuno-millionesimi*.

Convenendo pertanto, che « scritto uno zero ed una virgola a destra, le cifre significative scrittegli dopo abbiamo un valore dieci in dieci volte minore del loro assoluto, a misura che occupano un posto da lei più lontano » noi possiamo rappresentare *sotto forma di numero intiero* una qualunque delle nostre frazioni *proprie*, e ciò collo scriver soltanto il suo numeratore, *completato*, se abbisogna, a sinistra da tanti zeri, quante cifre hà di più il denominatore, e poi separando il primo di questi zeri a sinistra con una virgola.

Nel caso, che qualcheduna delle nostre frazioni fosse *impropria*, se si osserva, che, separando nel di lei numeratore con una virgola tante cifre a destra, quanti sono gli zeri del suo denominatore, essa si può riguardare come la somma di due frazioni del denominatore stesso, una delle quali abbia per numeratore coteste cifre separate, e l'altra altrettanti zeri seguiti a sinistra dalle cifre restanti (Tema prec. pag. 43), è facil rilevare che cotesta frazione *impropria* si comporrà del *numero intiero* soltanto espresso dalle cifre a sinistra della virgola del suo numeratore, e di una frazione dello stesso denominatore, il numeratore della quale siano le altre cifre separate a destra.

Se dunque si conviene, che la cifra del numeratore immediatamente a sinistra della virgola, nelle ipotesi che sia significativa, esprima delle unità semplici, mentre quelle, che seguono a sinistra di lei esprimono successivamente delle diecine, centinaja, migliaja, . ., e che le altre, che seguono a destra dopo la virgola, esprimono successivamente de' decimi, centesimi, millesimi, . ., si conclude, che cotesto numeratore colle cifre separate come si è detto, basterà per se stesso soltanto a rappresentare la nostra frazione *impropria*.

In questa guisa alla frazione per esempio $\frac{153}{10}$ si potrà sostituire la semplice caratteristica 15,3, la quale perciò si leggerà *centocinquantatrè-decimi*, oppure *quindici-intieri e trè-decimi*.

Le convenzioni pertanto sin quì fatte per scrivere *sotto forma di numero intiero* una qualunque delle nostre frazioni, *propria* od *impropria* ehe sia, si riducono alla unica seguente, cioè
« Che proposto un numero intiero qualunque,
« *completandolo* o nò a sinistra da uno o più
« zeri, e seperandovi ovunque a piacere le cifre
« trà loro con una virgola, il sistema di quelle,
« che restano a sinistra, se ve ne sono delle si-
« gnificative, esprima un numero intiero di uni-
« tà semplici, ed il sistema di quelle, tutte od
« in parte significative, che restano a destra, sia

« il numeratore di una frazione, il denominator
« della quale si sottintenda essere la unità se-
« guìta da altrettanti zeri »

Siccome una tal convenzione porta, che il *valor locale* di una cifra significativa sia il *decimo* di quello, che avrebbe, se occupasse il posto della cifra immediatamente a sinistra, si vede, che essa non serve, che a completare il nostro sistema di Numerazione fin da principio stabilito (Tema primo, pag. 14), estendendolo da sinistra verso destra, e che dicesi *Sistema decimale*; perciò alle frazioni, o numeri precedenti si dà il nome di *Frazioni*, o *Numeri decimali*, mentre le frazioni di ogni altra specie diconsi *Frazioni ordinarie*.

Del resto profittando dell' avvertenza in addietro fatta (Tema prec. pag. 44), cioè che una frazione di qualunque specie si può riguardare come resultante dall' addizione di più frazioni parziali, tutte dello stesso suo denominatore, i respettivi numeratori delle quali siano ciascuna cifra significativa del suo numeratore, seguita respettivamente da tanti zeri, quante cifre essa vi ha dopo di se, ed osservando, che nel nostro caso nei due termini di ciascuna di queste frazioni si può sopprimere uno, due, trè, ..zeri, era ben facil rilevare, come una frazione decimale colla convenzione fatta potea rappresentarsi sotto la forma di numero intiero.

Un numero decimale, il quale contenga *degl'intieri*, essendo *spurio* od *improprio*, ogni altro sarà *genuino* o *proprio*, e questo potrassi dire semplicemente *decimale*; mentre poi in quello la cifra immediatamente a sinistra della virgola può dirsi del primo ordine *assoluto*, le cifre che nell' uno o nell' altro gli succedono verso sinistra, o verso destra, potranno dirsi del secondo, terzo,... ordine *relativo* superiore od inferiore respettivamente.

Sarà bene l' esercitarsi a leggere od enunciare dei numeri decimali scritti, ed a scrivere degli enunciati di numeri decimali, ed anche a convertirli sotto forma di frazioni ordinarie.

3. In conseguenza delle convenzioni precedentemente fatte è facil persuadersi, che un numero decimale qualunque gode delle due seguenti proprietà principali.

1.ª Che, scrivendogli di seguito a destra, egualmentechè a sinistra, quanti mai zeri si vogliono, o sopprimendovi i finali, se vi sono, esso non muta mai *valore*.

2.ª Che, tenendo fisse le cifre, e *mobilizzando*, per così dire, la virgola di uno, due, trè,... posti verso destra, o verso sinistra, esso acquista un valore dieci, cento, mille,... volte respettivamente maggiore o minore, ossia si moltiplica o si divide respettivamente per 10, 100, 1000,...

Per la prima di queste proprietà ad un decimale, che avesse dopo la virgola meno cifre di un' altro, potendosene dare lo stesso numero, si dice, che si *completa per ridurlo al medesimo denominatore del secondo*; onde si conclude, che di due decimali di più o meno cifre avrà un valor più piccolo soltanto quello, che avrà il primo una cifra più piccola della corrispondente del medesimo ordine nell' altro, sebbene questo possa avere meno cifre.

Così i valori di 0,54321...; 0,00078...; 0,6839... saranno respettivamente più piccoli di quelli di 0,7..; 0,001..; 0,684..

Si avverte, che i punti scritti di seguito a ciascun decimale stannovi a denotare quali e quante altre mai cifre si vogliano.

Del resto per la stessa prima proprietà ad un numero intiero si può dar l'aspetto di numero decimale, scrivendogli di seguito a destra quanti mai si voglian zeri, separati da lui con una virgola. Così in luogo per es. di 2 si può scrivere 2,000...

4. Venendo adesso alle operazioni sulle frazioni decimali, ridotte, come abbiam fatto alla forma di numeri intieri, noi diciamo primieramente, che in quanto alla pratica esse si

eseguiranno, come sù i numeri intieri; in quanto poi all'oggetto di farle, come si deve, nel medesimo senso, che sulle frazioni ordinarie in generale (Tema prec. §. II), occorreranno soltanto, come andiamo a vedere, alcune poche avvertenze intorno alla posizione della virgola nei resultati, che nei diversi Casi si otterranno.

Entrando pertanto succintamente in materia sù questo proposito, e distinguendo al solito tanto le Operazioni dirette, che le inverse, in trè Casi, cominceremo dal

CASO I.

Addizione delle Frazioni, o Numeri decimali.

In questo caso, dopo avere scritti i numeri decimali proposti l'uno sotto l'altro in modo, che le loro virgole si corrispondano in una medesima direzione verticale, la operazione si eseguirà come per gl' intieri coll' avvertenza soltanto di porre poi nella somma sotto il frego una virgola nella direzione medesima delle altre.

Ecco per un esempio il tipo del calcolo per l' addizione de' cinque numeri decimali, che vi si vedono stritti sopra il frego, la somma dei quali è il numero decimale sottoscritto.

$$
\begin{array}{r}
0,301 \\
7,235 \\
300,0001 \\
884,3012 \\
45,20103 \\
\hline
1237,03833
\end{array}
$$

CASO II.

Moltiplicazione delle Frazioni, o Numeri decimali.

Per eseguire la moltiplicazione di due numeri decimali trà loro noi comincieremo dal distinguer due casi, cioè quello, in cui debba moltiplicarsi un numero decimale per un' intiero, e quello, in cui debba moltiplicarsi un numero decimale parimente per un' altro numero decimale.

Nel primo caso siccome non s' intende, che di ripetere il primo numero tante volte, quante unità contiene il secondo, è chiaro che basterà far la operazione, come se anche il primo fosse intiero.

Perciò in questo caso, sotto il decimale scritto l' intiero in modo, che la prima cifra a destra di questo corrisponda alla prima a destra pure di quello, si farà la operazione come per gl' intieri; e poi nel prodotto, completato o nò a sinistra da tanti zeri, quanti bastano, scriveremo una virgola in direzione verticale a quella del decimale superiore.

Ecco il tipo del calcolo di due esempj.

$$\begin{array}{r} 0{,}007 \\ 4 \\ \hline 0{,}028 \end{array}, \qquad \begin{array}{r} 2{,}4542 \\ 53 \\ \hline 7\;3626 \\ 122\;710 \\ \hline 130{,}0726 \end{array}$$

Nel secondo caso rammentandoci che questa operazioue sù i decimali si fà nel medesimo senso, che sulle frazioni in generale, cioè che per essa s' intende di prendere sul Moltiplicando tanti decimi, o centesimi, o millesimi,... quanti ne indica *tutto* il Moltiplicatore, si concepisce, che, se nel Moltiplicando, completato o nò a sinistra da zeri, si fà retrocedere la virgola di tanti posti, quante cifre sono a destra di lei nel Moltiplicatore, in questo essa dovrà sopprimersi; e così il presente caso si ridurrà all'altro.

Ma, se si osserva, che operando in questa guisa la virgola nel prodotto avrebbe alla sua destra tante cifre di più, che nel Moltiplicatore, quante essa ve ne hà nel Moltiplicando, si scorge subito, che, senza stare a fare in questo e in quello mutazione alcuna, scrivendo il primo sotto il secondo in modo, che le loro virgole si corrispondano in direzione verticale, e poi facendo la operazione come nel primo caso, se la cifra di unità del primo prodotto parziale, che si fà a memoria di cifra per cifra, si scrive sotto il frego di tanti posti in avanti a destra a quella del Moltiplicatore, quante a destra della virgola sono le cifre del Moltiplicando, nel prodotto, completato o nò a sinistra da zeri, la virgola si dovrà trovare precisamente nella medesima direzione verticale delle altre due.

Ecco il tipo del calcolo di cinque esempj, eseguito come si dice.

0,04	2,4542	21,32
0,007	0,0053	0,100103
0,00028	73626	6396
	122710	2132
	0,01300726	2 132
		2,13419596

11,971	934,525
73,45	34,276
59855	5 607150
4 7884	65 41675
35 913	186 9050
837 97	3738 100
879,26995	28035 75
	32031,778900

Si noti, che nel caso particolare, in cui si avesse da moltiplicare un numero decimale per una unità decimale di un' ordine relativo inferiore comunque elevato, dopo aver completato cotesto decimale a sinistra con un numero sufficiente di zeri, basterà farvi retrocedere la virgola di tanti posti, quante sono le unità, che contiene l' ordine, di cui si tratta; ciocchè rientra nella seconda proprietà di sopra (pag. 12, 13) Così il prodotto per esempio di 3,01 per 0,001, cioè per una unità del *terz'* ordine, sarà 0,00301.

CASO III.

Elevazione a potenze delle Frazioni, o Numeri decimali.

Nel caso particolare, in cui due numeri decimali da moltiplicarsi trà loro fossero uguali, cioè nel caso, in cui dovesse farsi il *quadrato* di un numero decimale proposto, la operazione si eseguirebbe, come nel caso analogo pei numeri intieri (Tema primo, pag. 58, 59), avvertendo di scriver la cifra delle unità del primo *prodotto parziale* sotto il frego di tanti posti in avanti alla ultima del decimale superiore, quante questo hà cifre alla destra della virgola, acciò la virgola del quadrato totale, che otterremo, si trovi precisamente nella medesima direzione verticale dell' altra.

Ecco il tipo del calcolo per un esempio

$$\begin{array}{r}
7,345 \\
\hline
73425 \\
5856 \\
4\ 29 \\
49 \\
\hline
53,949025
\end{array}$$

Parimente si formerebbe il cubo di un numero decimale proposto nel modo stesso, che in addietro abbiamo insegnato pei numeri intieri (Tema primo pag. 65, e seg.), avvertendo di scrivere quì il primo *prodotto parziale* sotto il frego in modo, che la sua prima cifra à destra si trovi di tanti posti in avanti a quella del decimale superiore, quanto è il doppio delle cifre a destra della virgola in questo, acciò la virgola nel cubo totale, che otterremo, si trovi al solito precisamente nella medesima direzione verticale di quella del decimale superiore medesimo.

Ecco il tipo del calcolo per un esempio

	16	36	25	
3,564	64152	5340	315	9
152254144	53460	3204	3175	
2 243016	32076	373836		
15 875	38063536			
27				
45,270270144				

5. Passando adesso alle Operazioni inverse, incominciamo dal

CASO I.

Sottrazione delle Frazioni, o Numeri decimali.

In questo caso trattandosi di assegnare il *Resto* o la differenza trà due numeri decimali soltanto, se il Diminuendo hà meno *cifre decimali* del Diminutore, o viceversa, potremo prima completar quello, che ne hà meno; e poi, scrivendo il secondo sotto il primo in modo, che le cifre dell' uno corrispondano respettivamente in colonna a quelle del medesimo ordine dell' altro, ossìa in modo, che le due virgole si trovino in una medesima direzione verticale, operare come nel caso analogo pei Numeri intieri, avvertendo soltanto di porre nel resto o differenza la virgola nella medesima direzione delle altre due. Ma, senza stare a fare completazione alcuna, scrivendo soltanto il Diminutore sotto il Diminuendo in modo, che le loro virgole si trovino in direzione verticale, potremo sempre eseguire nello stesso modo la operazione, purchè dove nell' uno o nell' altro *manca* una cifra corrispondente, si sottintenda la cifra o. (Tema primo, pag. 13)

Ecco il tipo del calcolo di trè esempj

73,423252	82,98	1
72,98	73,423252	0,7345
0,443252	9,556748	0,2655 ,

nel terzo de quali si sottintende, che il Diminuendo 1 abbia alla sua destra quattro zeri separati da una virgola.

CASO II.

Divisione delle Frazioni, o Numeri decimali.

Nella Divisione delle Frazioni, o Numeri decimali, distingueremo, come per la Moltiplicazione si è fatto, due casi, secondochè il Divisore è un numero intiero, oppure un numero decimale, come si suppone generalmente il Dividendo.

Nel primo caso intendendo, in conformità a ciò, che abbiamo detto in addietro (Tema secondo, pag. 24), di dover determinar per quoziente un numero decimale tale, che venendo sottratto dal Dividendo tante volte quante unità contiene il Divisore, lasci il più piccolo residuo possibile, è chiaro, che la operazione si farà, come se il primo di questi numeri fosse anch' esso un numero intiero, avvertendo soltanto di porre nel Quoziente, che si scrive sopra il frego, la virgola in direzione verticale a quella del Dividendo scritto sotto.

Ecco il tipo del calcolo di un' esempio

```
        64,811427
73 |4731,234231
     351
      59 2
       83
        104
         312
          203
           571
            60
```

Nel secondo caso intendendo, che la divisione si faccia nel medesimo senso, che per le frazioni ordinarie in generale (Tema prec. pag. 63), siccome, posto il Divisore sotto forma di frazione ordinaria, per la operazione bisognerebbe prima moltiplicare per 10 il Dividendo tante volte, quante sono le cifre decimali dopo la virgola nel Divisore, e poi per questo Divisore stesso, soppressavi la virgola, dividere il prodotto, così si vede, che nel Dividendo, completato a destra da zeri, se occorre, portando in avanti la virgola di tanti posti, quante cifre essa ha dopo di se nel Divisore, per questo senza virgola si potrà dividere quello colla virgola traslocata; e così il presente secondo caso si ridurrà al primo.

Ecco il tipo del calcolo per trè esempj di divisione, cioè respettivamente

Di 0,000101312103345 per 0,00999
Di 0,0010234589912 per 0,001013
Di 75,45 per 0,00057

0,010141351	1,010324	132315
999 | 10,131210345	1013 | 1023,458912	57 | 7542000
1412	10 45	184
4131	3289	132
1350	2501	180
3513	4752	90
5164	700	330
1695		45
696		

Nell' ultimo di questi esempj si vede, che per poter traslocar nel Dividendo la virgola in avanti di cinque posti, è stato necessario completarlo prima a destra con trè zeri almeno. Se il Dividendo fosse stato un numero intiero, esso si sarebbe completato a destra con tanti zeri almeno, quante cifre avesse avute dopo la virgola il Divisore.

Del resto, se si avesse da dividere un numero decimale per una frazione ordinaria, bisognerebbe prima moltiplicarlo pel denominatore della frazione e poi pel numeratore dividere il prodotto; ciocchè si riduce a dividere un numero decimale per un' intiero, come accaderebbe, se si avesse da moltiplicare un numero decimale per una frazione ordinaria.

Viceversa, se si avesse da dividere una frazione ordinaria per un numero decimale, prima si moltiplicherebbe questo pel denominatore della frazione, e poi pel prodotto si dividerebbe il numeratore; ciocchè si riduce a dividere un numero intiero per un numero decimale.

CASO III.

Estrazione delle Radici dalle frazioni, o Numeri decimali.

In questo caso primieramente, perchè un Numero decimale proposto possa essere un quadrato o cubo perfetto, o, perchè messo sotto la forma di frazione ordinaria, sia un quadrato o cubo perfetto il suo denominatore (Tema prec. pag. 73), è necessario, che a destra della virgola esso abbia un numero di cifre multiplo respettivamente di 2 o di 3. (pag. 19, 20)

Dopo aver soddisfatta questa condizione col completarlo a destra con uno o due zeri al più, ci accingeremo alla operazione come nel caso analogo pei numeri intieri (Tema secondo, pag. 43 e seg.), senza stare a spezzarlo per mezzo di virgole in classi di due o trè cifre ciascuna, ma soltanto avvertendo di scrivere alla radice sopra il frego una virgola in direzione verticale a quella del numero sottoscritto.

Non staremo quì a dare esempj di estrazione di radici quadrate o cubiche di numeri decimali riserbandoci a proporne qualcuno in seguito, quando riprenderemo la considerazione di tali materie. Noteremo soltanto per ora, che la radice di qualunque grado o nome di un numero decimale, o nò, il di cui valore sia maggiore o minore di quello di 1, avrà pure anch' essa un valore respettivamente sempre maggiore o minore di quello di 1; com' è facile persuadersene.

§. II.

Traduzione approssimativa od esatta delle frazioni ordinarie in decimali.

1. Essendoci abbastanza convinti nel § precedente della utilità, che si può ritrarre nel calcolo dalla introduzione delle frazioni decimali in luogo delle ordinarie, importa assai il far vedere, come queste, essendoci date o come *elementi* o come *resultati finali* di un calcolo, si possano in ogni caso *tradurre* in quelle, se non *esattamente*, almeno *per approssimazione*.

A quest' oggetto riflettendo, che un numero intiero si può porre sotto l' aspetto di decimale, scrivendogli di seguito a destra, quanti mai si voglian zeri, separati da una virgola (pag. 13), se si divide poi cotesto numero per un' altro intiero, siccome ciascuno dei resti successivi, che si trovano nel corso della operazione, è più piccolo di ogni altro, che fosse quello della sottrazione del prodotto di un numero diverso dal quoziente corrispondente, e d' altrettante cifre, pel divisore stesso (pag. 22), così si concepisce, che cotesto quoziente, trascurato il resto, s' accosterà più d' ogni altro numero decimale d' altrettante cifre ad esprimere il *valore* della frazione, che abbia per numeratore il primo, e per denominatore il secondo numero intiero.

Quindi è, che per ottenere un numero decimali di quante mai si voglian cifre, il quale più d' ogni altro di altrettante s' approssimi ad esprimere il valore di una proposta frazione ordinaria, si propone la seguente regola.

« Se la frazione è *impropria*, dopo aver fat-
« ta nel modo solito (Tema secondo, pag. 26 e
« seg.) la divisione del numeratore pel denomi-
« natore, si scriva una virgola a destra del
« quoziente ottenuto sopra il frego, ed uno zero
« a destra dell' ultimo resto ch' è sotto. Se è
« *propria* si scriva sopra il frego uno zero per
« quoziente con una virgola a destra, ed un' al-
« tro zero a destra del numeratore, ch' è scrit-
« to sotto, considerato come un resto di divi-
« sione fatta.

« Indi sù questo, o sù quel resultato, come
« sù parzial dividendo, eseguendo la divisione,
« si scriva la cifra, che si trova per quoziente,
« al suo posto dopo la virgola sopra il frego, e
« poi uno zero a destra del nuovo resto, ch' è

« sotto; e così si prosegua la operazione. Ciò, « che resulterà scritto al quoziente sopra il « frego, costituirà il numero decimale voluto di più o meno cifre.

Nella esecuzione di questa regola consiste il processo per la *traduzione approssimativa* delle frazioni ordinarie in decimali.

Ecco il tipo del calcolo per la frazione ordinaria *impropria* $\frac{147475}{362}$

```
      407,389502762430939 . . .
362 | 147475
        2675
         1410
          3240
           3440
            1820
             1000
              2760
               2260
                880
                1560
                 1120
                  3400
                   1420
                    3340
                      82
                  . . . . . . .
```

ove i punti di seguito al quoziente stannovi per denotare quante altre mai cifre si vogliano, dimodochè spingendo la operazione sino alla cinquantesima cifra dopo la virgola, oltre alle quindici precedenti, si dovranno scrivere (come si può riscontrare, proseguendo la operazione) queste altre trentacinque cifre.

22651933701657458563535921602212707....

Si può osservare, che a questo processo di calcolo si riduce anche la divisione di un numero decimale per un numero intiero, quando a destra dell'ultimo resto trovato si scriva uno zero, e poi una nuova cifra al quoziente; e così successivamente proseguendo la operazione si otterrà per approssimazione un tal quoziente in decimali.

2. Siccome il processo per eseguir la precedente operazione, prescindendo dalla considerazione della virgola, consiste nel moltiplicare il numeratore di una proposta frazione successivamente per 10, ossìa per 2 e per 5, *senza fine*, e poi nel dividere il prodotto pel denominatore, è facil persuadersi, che ciò si riduce.

1.° A dividere il denominatore di cotesta frazione separatamente per 2 e per 5, finchè si può (Tema prec. pag. 47), ed a moltiplicare il numeratore separatamente per 2 e per 5, finchè il numero delle moltiplicazioni insieme e delle divisioni per 2 sia lo stesso, che quello per 5.

2.° A considerare la nuova frazione resultante, come se fosse la proposta stessa.

Ma il Denominatore della frazione proposta essendo *numero primo* col numeratore, come si suppone, è facil persuadersi pure, che anche il denominatore della nuova frazione sarà sempre *numero primo* separatamente con ciascuno dei fattori del suo numeratore, anche quando si moltiplichi questo per 10 *senza fine*; d'onde si conclude, che la precedente operazione per tradurre in decimali una frazione ordinaria generalmente non terminerà giammai (ivi pag. 35).

V' è però un caso, in cui cotesta operazione si termina, ed è quello, in cui, dopo di aver diviso esattamente tante volte, quante si può, per 2 e per 5 il denominatore della frazione proposta , si trovasse 1 per definitivo quoziente, ossìa, in cui cotesto denominatore fosse precisamente od una certa potenza del 2, o del 5 separatamente, oppure il prodotto di due potenze diverse di questi due numeri.

Infatti in questo caso, per avere in decimali il valore della proposta frazione , in luogo di seguir la regola precedente, basterà moltiplicare ambedue i suoi termini per una potenza tale di 2 o di 5, per cui quello di questi numeri, che nel denominatore non ve n'hà alcuna , o ve l'hà minore, l'acquisti uguale a quella dell'altro; e poi sopprimendo il nuovo denominatore (che sarà la unità seguita da uno o più zeri), separar nel numerator nuovo con una virgola tante cifre a destra, quant' erano le unità del grado della potenza del 2, o del 5 maggiore nel denominatore antico. È visibile, che la moltiplicazione di questo denominatore ci si potrà anche risparmiare.

Così per esempio nella frazione $\frac{3}{8}$ in cui il denominatore 8 è la *terza* potenza di 2, sopprimendo questo, e moltiplicando soltanto il numeratore 3 per la *terza* potenza di 5, ossìa per 125, si avrà il numero intiero 375, oppure 0375, in cui si separeranno a destra con una virgola *trè* cifre; e però si avrà il numero decimale *esatto* 0,375, equivalente alla frazione $\frac{3}{8}$

Reciprocamente, se la operazione per tradurre una frazione ordinaria in decimali si termina, possiamo esser sicuri, che cotesta frazione è compresa nel caso precedente.

Ed infatti, se il quoziente esatto avuto si pone sotto l' aspetto di frazione ordinaria, il denominatore riuscendo la unità seguita da uno o più zeri, ossìa una potenza di 10, non è difficile persuadersi, ch' esso sarà il prodotto di una certa potenza del numero 2 per una potenza uguale del numero 5; dividendo dunque separatamente per 2 e per 5 ambe due i termini di cotesta frazione, finchè si può, acciò diventino identici, come deve accadere, con quelli della proposta equivalente, *primi* per ipotesi trà loro (Tema prec. pag. 39), si vede, che il denominatore di questa sarà necessariamente una potenza o del numero 2 o del numero 5 separatamente, oppure il prodotto di due potenze diverse di questi due numeri.

Eseguendo per esempio la operazione relativamente alla frazione *propria* $\frac{7}{512}$, come segue

```
        0,013671875
512|700
   1880
    3440
     3680
       960
       4480
        3840
         2560
           0
```

si vede, ch' essa termina alla *nona* cifra decimale del quoziente dopo la virgola. Posto dunque cotesto quoziente sotto la forma $\frac{13671875}{1000000000}$, e divisi i termini di questa frazione per la *nona* potenza del numero 5, ciocchè si può, ossìa pel numero 1953125, siccome si riscontra che essi si riducono a quelli della proposta, si conclude, che il denominatore 512 di questa dev' essere precisamente la *nona* potenza del solo numero 2.

3. Eccettuato il caso precedente, in cui la operazione per tradurre in decimali una frazione ordinaria si termina, parrebbe, che a misura che si volesse al quoziente una cifra più remota, bisognasse per determinarla spinger sempre più oltre la operazione. Ma è facil persuadersi, che basterà spingerla sino ad un certo *limite*, oltre il quale non è necessario progredire, perchè al quoziente alcune delle cifre si ripeteranno costantemente l' una dopo l' altra, formandovi un *periodo*, conosciuto il quale, vi potremo scrivere quante altre mai cifre si vorranno; per lo che si potrà riguardar la frazione proposta come tradotta in un numero *indefinito* di cifre decimali. Ed infatti, siccome in cotesta operazione il Divisore è sempre *costante*, cioè lo stesso, ed i successivi resti parziali della medesima devon riuscir tutti minori di lui (Tema secondo, pag. 20 e seg.), è chiaro, che, dopo averne avuti al più tanti, quante unità, *meno una*, contiene cotesto Divisore, si dovrà ritrovare uno

dei resti precedenti. Scrivendo dunque uno zero a destra di quest' ultimo resto, come già sen'era scritto un'altro a destra del precedente uguale, si avrà un secondo dividendo parziale, che ci darà al quoziente una cifra uguale alla corrispondente dataci dal primo; e così di seguito fino all'ultimo resto precedente. Segue inoltre che le cifre del periodo saranno anch'esse sempre meno delle unità del Divisore.

Eseguendo per esempio la operazione sulla frazione $\frac{5}{7}$, come segue

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0,714285\;\ldots \\
\hline
7 & 5\,0 \\
 & \quad 10 \\
 & \qquad 30 \\
 & \qquad\; 20 \\
 & \qquad\quad 60 \\
 & \qquad\qquad 40 \\
 & \qquad\qquad\; 5
\end{array}
$$

si vede, che il primo resto 5 ritorna dopo la *sesta* parzial divisione, e però le *sei* cifre 714285, ottenute al quoziente dopo la virgola, vi costituiscono un periodo, che comincia immediatamente dopo la virgola stessa.

Per un' altro esempio eseguendo la operazione sulla frazione $\frac{7}{12}$, come segue

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0,583\ \ldots \\
\hline
12 & 70 \\
 & 100 \\
 & 40 \\
 & 4
\end{array}
$$

si vede, che, siccome dopo la *terza* parzial divisione ritorna subito il medesimo resto 4 corrispondente alla cifra 3 del quoziente, così questa cifra, *terza* dopo la virgola, vi si ripeterà senza interruzione.

Si conclude pertanto, che sebbene, quando il Divisore è molto grande, la prima cifra del secondo periodo, che si desidera, possa esser molto remota, come accade nell' esempio di sopra (pag. 28), pure, spingendo più oltre la operazione, noi siamo sempre sicuri di poterla una volta ottenere.

Del resto è chiaro, che il numero decimale, il quale risulta al quoziente, per quante cifre vi si prendano, ha un valore approssimato sempre minor di quello della frazione proposta.

4. Volendosi formare una idea adequata del *grado* di approssimazione, che si ottiene, quando ad una frazione ordinaria si sostituisce il numero decimale, che resulta al quoziente, a misura che vi si scrive un più gran numero di cifre, si osservi in primo luogo, che se nella operazione per ottenerlo si fosse aumentata una cifra qua-

lunque anche di *una unità sola*, allora il prodotto della nuova cifra pel divisore non si sarebbe potuto più sottrarre dal parzial dividendo corrispondente. D' onde si conclude.

Che, come prendendo al quoziente un certo numero di cifre si hà un numero decimale, il quale si accosta più di ogni altro di altrettante ad esprimere, come suol dirsi, *per difetto* il valore della frazione proposta (pag. 27), così, aumentandovi d' una unità l' ultima cifra, si avrà un' altro numero decimale, il quale più d' ogni altro d' altrettante cifre s' accosterà pure ad esprimere, come suol dirsi, *per eccesso* il valore della frazione proposta medesima; e che perciò l' uno o l' altro di cotesti due numeri, a misura che vi si considerano più cifre, esprimerà, per difetto, o per eccesso, il valore della frazione proposta, a *meno* di una unità decimale di un ordine relativo inferiore *comunque elevato*.

Riflettendo in secondo luogo, che il valore di quest' ultima unità si può imaginare così piccolo da divenire inferiore a quello della differenza comunque piccola trà due frazioni *date*, se ne deduce, che i due numeri decimali precedenti, a misura che vi si considereranno più cifre, si avvicineranno trà loro in modo da escluder fuori dei loro valori quello di qualunque altra frazione, data diversa dalla proposta medesima.

Finalmente per accertarsi in quali circostanze il grado di approssimazione è maggiore, allorchè alla frazione proposta si sostituisce il numero decimale approssimato per eccesso, in luogo di quello approssimato per difetto, si osservi, che la unità aggiunta alla ultima cifra di questo, potendosi riguardare come la somma dell' eccesso dell' uno sopra la frazione proposta e dell' eccesso di questa sull' altro, nella ipotesi che il primo di questi eccessi sia minore del secondo, bisognerà che cotesta unità abbia un valore più piccolo del doppio di questo secondo eccesso, e però un tal secondo eccesso, moltiplicato per 10, acquisterà un valore superiore a quello di 5 unità simili alla precedente.

Ora l' eccesso di una frazione proposta sopra un numero decimale, approssimato per difetto, è visibilmente il resto della parzial divisione, che si fà per ottener l' ultima cifra di un tal decimale, resto però da dividersi poi pel denominatore della frazione stessa. D' onde si vede, che nella operazione scrivendo di seguito a cotesto resto uno zero (con che si fà una moltiplicazione per 10), se la cifra ulteriore resultante al quoziente è 5, o supera 5, quando si aumenti di una unità la cifra precedente, siamo sicuri, che il nuovo numero decimale esprimerà per eccesso più da vicino di quello per difetto il valore della proposta frazione.

Però si prescrive la seguente Regola
« Fermandosi nel quoziente ad una certa cifra,
« aumentatela di una unità, se la seguente non
« riesce inferiore a 5, per avere un numero
« decimale, approssimato *più* per eccesso, che
« per difetto ».

Del resto, se si osserva, che in un numero decimale *indefinito* una unità sola di qualunque sua cifra hà un valore costantemente superiore a quello di tutte le altre, che la seguono a destra (pag. 13); e che perciò, secondochè la prima di queste seconde cifre è più piccola o nò di 5, il loro valore è respettivamente inferiore o superiore a quello di 0,5 della precedente unità, si vede, che, qualunque possa essere stata la operazione, che ci avesse condotti ad aver per resultato cotesto numero decimale *indefinito*, avrebbe avuto sempre luogo la medesima *Regola*, affine di ottenere un numero decimale *finito*, approssimato *più* per eccesso, che per difetto.

TEMA QUINTO

Radicali numerici. Come s' interpetrano? Loro principali proprietà, e prime trè Operazioni dirette ed inverse sù i medesimi. Traduzione approssimativa dei Radicali in decimali, e segnatamente de' Radicali quadrati e cubici.

§. I.

Radicali numerici. Come s' interpetrano? Loro principali proprietà, e prime trè Operazioni dirette ed inverse sù i medesimi.

1 Ripigliando adesso la considerazione della estrazione delle radici, specialmente quadrate e cubiche, dai Numeri decimali, come precedentemente abbiamo promesso (pag. 25), noi cominceremo dall' osservare, che, imaginata estratta, colle avvertenze ivi accennate, da un proposto Numero decimale la radice *imperfetta* quadrata o cubica di un certo numero di cifre, se nella operazione, dopo avere *sperimentata giusta* alla radice l' ultima cifra, questa si

aumentasse anche di *una unità sola*, allora il *prodotto parziale* relativo alla nuova cifra non potrebbe più sottrarsi dall'ultimo resto *completato* (Tema secondo, pag. 41,e seg.). D'onde si conclude in primo luogo

Che, come facendo il quadrato o cubo della radice *imperfetta* trovata di un proposto numero decimale ne resulta un secondo tale, che ogni altro d'altrettante cifre, ossia del medesimo denominatore, non può esprimer *per difetto* più da vicino il valore di cotesto numero proposto (Tema terzo, pag. 72), così facendo il quadrato o cubo della medesima radice, dopo avervi aumentata l'ultima cifra di una unità (la quale potrà perciò dirsi *piucchè perfetta*), ne resulterà un terzo numero decimale tale, che ogni altro del medesimo numero di cifre, ossia del denominatore medesimo, non potrà esprimere *per eccesso* più da vicino il valore del medesimo numero decimale proposto.

Ma d'altronde sappiamo, che aumentandosi di una unità l'ultima cifra di un numero decimale qualunque, il suo quadrato si aumenta della somma

1.° Del *doppio* prodotto delle sue cifre per una unità decimale dell' ordine dell' ultima cifra,

2.° Del *quadrato* di questa unità;

ed il suo cubo si aumenta della somma

1.° Del *triplo* prodotto del quadrato delle sue cifre per una unità decimale dell' ordine dell' ultima cifra,

2.° Del *triplo* prodotto delle medesime cifre pel quadrato della unità precedente.

3.° Del *cubo* di questa stessa unità. (Tema terzo, pag. 56, 57).

Se dunque il numero decimale proposto avrà dopo la virgola quante mai si voglian cifre, siccome si potrà estrar da esso una radice quadrata o cubica, di cui l' ultima cifra decimale sia di un' ordine relativo inferiore *comunque elevato*, così si conclude in secondo luogo, che l' eccesso del proposto numero sul quadrato o cubo della sua radice *imperfetta*, egualmentechè l' eccesso sopra di esso del quadrato o cubo della sua radice *piucchè perfetta*, dovendo essere inferiore all' una od all' altra delle due precedenti somme, si potrà sempre supporre quanto mai si vuol piccolo a piacere (pag. 18).

In conseguenza di ciò, siccome un numero intiero qualunque si può sempre riguardare come equivalente ad un numero decimale, che abbia dopo la virgola quanti mai si voglian zeri (pag. 13), ed il valore di un numero fratto si può pure riguardare come compreso frà i valori di due numeri decimali *consecutivi* di quante mai si voglian cifre anch' essi (pag. 36), così imaginando estratta la radice, quadrata o cubica, o dal primo di cotesti numeri, o dall' uno e dall' altro dei secondi, a misura che in essa si aumenterà di una unità una cifra più remota, potremo avere per radici, *imperfetta*, e *piucchè perfetta*, due altri numeri decimali *consecutivi* sempre più prossimi trà loro in modo, che trà i loro quadrati o cubi respettivi *non possa esser mai compreso* altro numero, *dato* diverso da uno proposto intiero o fratto.

Per questo motivo *si dice*, che l' uno, o l' altro di cotesti due ultimi numeri decimali consecutivi sono *i valori* approssimati respettivamente *per difetto* o *per eccesso* dalla *radice perfetta* od *esatta* di un numero proposto, anche quando questo non sia nè un quadrato, nè un cubo, *numericamente* perfetto.

2 Per giustificare questa nostra maniera di dire, e render sensibile la *esistenza*, se non di un numero *ordinario*, almeno in un caso particolare di una *grandezza*, che sia come la *radice* quadrata o cubica esatta di un' altra, espressa da un numero nè quadrato nè cubo perfetto, noi cominceremo dal distinguere alcuni nomi, e adottare alcune convenzioni.

Primieramente essendosi chiamato *quadrato* o *cubo* un numero, che fosse respettivamente la *seconda* o *terza* potenza di un' altro, considerato come concreto (Tema primo, pag. 54; Tema terzo, pag. 54), per la ragione, ch' esso può servire a rappresentar la *grandezza* di un quadrato o cubo *effettivo*, relativamente a quella di uno de' piccoli quadrati, o cubi uguali, che, come *elementi*, lo compongono, noi per distinguer nel discorso un quadrato o cubo dall' altro, chiamando il primo *quadrato* o *cubo numerico*, chiameremo il secondo *quadrato o cubo geometrico*, per la ragione che quadrati o cubi di tal fatta si considerano in un' altra Scienza, chiamata *Geometrìa*.

Parimente, siccome la radice di un quadrato o cubo numerico, considerata come concreta, può evidentemente servire a rappresentare una fila di piccoli quadrati o cubi, dei quali si compone il quadrato o cubo geometrico corrispondente, così una tal fila si può reciprocamente anche chiamare *radice quadrata o cubica geometrica* di cotesto primo quadrato o cubo numerico.

In secondo luogo, ponendo mente soltanto alla *lunghezza* di una fila misurata dal *lato* del quadrato o cubo geometrico, a cui appartiene, si può anche convenire, che un tal lato sia come la *radice geometrica* del quadrato o cubo numerico corrispondente.

Posto ciò, imaginando adesso un quadrato o cubo geometrico, composto di un numero comunque grande di quadrati o cubi elementari, quanto mai si voglian piccoli, il quale corrisponda al quadrato o cubo numerico della radice quadrata o cubica imperfetta di un numero decimale di quante mai si voglian cifre, siccome se ne può imaginare anche un'altro tale, che la sua radice geometrica abbia un'elemento di più, così è chiaro, che a misura che ciascuno di cotesti elementi si prende più piccolo, ed il loro numero si considera più grande, sempre più le radici respettive, oppure i lati de' due quadrati o cubi geometrici corrispondenti, si accosteranno trà loro in modo da escluder fuori qualunque altro lato, che non fosse quello di un terzo quadrato o cubo dato, che dovesse restar sempre compreso trà cotesti due.

Potendosi dunque tali quadrati o cubi geometrici riguardar come espressi respettivamente da due quadrati o cubi numerici tali, che trà essi resti sempre compreso, come precedentemente si è visto (pag. 42), un numero proposto, *qualunque altro escluso*, è forza concludere, nella ipotesi che questo numero esprima un terzo quadrato o cubo geometrico (lo che sempre accade, come può vedersi in Geometria), è *forza concluder,* dico, che il lato di cotesto terzo quadrato o cubo sia come la radice geometrica esatta di cotesto stesso numero proposto; e perciò un tal lato sarà o potrà riguardarsi come *la imagine sensibile* della *radice* numerica *esatta* di un tal numero medesimo.

Osservando per un' esempio, che, presi a piacere quattro quadrati uguali, se ciascuno di questi si spezza in due parti uguali mediante un *taglio diritto* da una delle sue quattro *punte* alla opposta, con *quattro* delle *otto* metà, che ne resultano, si può formare un quadrato, che abbia per lati i tagli fatti, si vede subito, che, valutato questo quadrato per 1, egualmentechè uno dei suoi lati, il quadrato, che potrebbe formarsi coi quattro quadrati primitivi, si valuterebbe per 2, ed in conseguenza uno dei suoi lati sarebbe, come la *radice quadrata esatta* di questo numero 2.

5. Per vedere indirettamente, che il lato di un quadrato o cubo geometrico, corrispondente ad un numero proposto intiero o fratto, che non sia quadrato o cubo numerico perfetto, non può esser mai espresso da un numero *ordinario*, cioè da un numero fin quì conosciuto, supponghiamo primieramente, che cotesto lato possa essere espresso da un numero intiero.

In questa ipotesi, il quadrato o cubo perfetto di questo secondo numero essendo anch' esso numero intiero, a questo bisognerebbe ch' equivalesse il numero proposto intiero o fratto; ciocchè non potrebbe accadere, a meno che nel primo caso il numero proposto non fosse un quadrato o cubo perfetto, e nel secondo, perchè, supposto essere una frazione irreducibile, questa non potrebbe mai tradursi in un numero intiero. (Tema terzo, pag. 37.)

Supponghiamo in secondo luogo, che quel lato possa essere espresso da una frazione irreducibile. In questa ipotesi, il di lei quadrato o cubo essendo anch' esso una frazione irreducibile (ivi), bisognerebbe, che a questa equivalesse un numero intiero, od un' altra frazione parimente irreducibile; ciocchè non potrebbe mai accadere nel primo caso; e nel secondo non accaderà neppure, a meno che la frazione proposta non sia anch' essa un quadrato o cubo perfetto; lo che non si suppone.

Noi siamo dunque costretti a dire, che il lato di un quadrato o cubo geometrico, corrispondente ad un numero proposto, che non è un quadrato o cubo numerico perfetto, debba essese espresso da un numero *straordinario*.

All' oggetto di rappresentarci questo numero in un modo atto a destarci la idea della sua origine, trattandosi per esempio del lato del quadrato di sopra valutato per 2, noi scriveremo avanti a 2 la iniziale di *radice* un pò alterata così $\sqrt{}$, che chiameremo *segno radicale*; e così resulterà il *simbolo* $\sqrt{2}$.

Se invece di una radice quadrata, si trattasse di una radice cubica, quarta,..., allora per distinguere queste radici trà loro si scriverebbe in carattere più minuto il numero, che ne *indicasse* il grado od il nome, trà i due *rami* del segno radicale; e si direbbe *indice*, mentre quello scritto a destra sotto il ramo più esteso dicesi la *base*.

Con queste convenzioni emergeranno i simboli $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \ldots$ ove in luogo di 2 potrebbe trovarsi per base qualunque altro numero intiero o fratto; e questi simboli si chiameranno *Radicali numerici*.

Da quanto fin quì abbiamo detto ci sembra pertanto, che i *Radicali numerici* possano interpetrarsi

Come simboli di radici numeriche, delle quali la esistenza è certa; ma che non si saprebbero mai calcolare esattamente nè in numeri intieri, nè in numeri fratti.

4. Volendo passare ad accennare le principali proprietà ed operazioni dei Radicali numerici si rende necessario il fare avanti alcune convenzioni, ed introdurre nel calcolo alcuni segni di abbreviazione.

E primieramente incominceremo a quest'oggetto dal sostituire alla preposizione *per*, già introdotta in un prodotto (Tema primo, p. 46), il segno $\times$ come di moltiplicazione *da farsi*, piuttostochè *fatta*, dei fattori, tra i quali s'interpone, coll' avvertenza di scrivere il primo quel fattore, che si considera come Moltiplicando. Per segno poi di moltiplicazione *fatta* gli sostituiremo un *punto*, il quale, piuttostochè *per*, pronunzieremo *in*, coll' avvertenza in questo caso, che quel fattore, che si considera come Moltiplicando, si scriva l' ultimo.

Con questa convenzione, tenendo fermi i simboli (1),(2), (3),... già introdotti anch' essi in calcolo (ivi), per denotare qualunque numero in *generale*, e che però si chiameranno *Numeri generali*, il loro prodotto *da farsi* si rappresenterà scrivendo (1) $\times$ (2) $\times$ (3)..., e quello *fatto* scrivendo (1).(2).(3)...

In questo secondo caso, i fattori essendo abbastanza trà loro distinti dalle parentesi, ci si suole risparmiare il punto, e si scrive anche (1)(2)(3)....

Posto ciò, consideriamo in primo luogo due fattori soltanto (1) e (2), e prendendo il secondo per Moltiplicatore facciamo la ipotesi, ch' esso sia uno dei numeri particolari 2, 3, 4, 5,..; allora per denotare, che il Moltiplicando (1) *si ripete per addizione* 2, 3, 4, 5.. volte, emergeranno i simboli respettivi

$$2(1), 3(1), 4(1), 5(1), \ldots .$$

Si conviene adunque, che un numero *particolare intiero*, scritto a sinistra di un numero *generale* (1), stìa a denotare, che questo *si ripete per addizione* tante volte, quante unità contien quello.

Consideriamo in secondo luogo in quel prodotto di mano in mano 2, 3, 4, 5, .. fattori, e facciamo la ipotesi, ch' essi siano tutti uguali al primo (1); allora per denotare, che il numero *generale* (1) *si ripete per moltiplicazione* 2, 3, 4, 5, .. volte, emergeranno i simboli respettivi

$$(1)(1), (1)(1)(1), (1)(1)(1)(1), (1)(1)(1)(1)(1), \ldots$$

Ma, come abbiamo convenuto, che un numero intiero, scritto *a sinistra* di (1), stìa a denotare, che (1) si ripete per addizione tante volte, quante unità contiene cotesto numero, così per denotare, che (1) *si ripete per moltiplicazione* un certo numero di volte, si può convenire di scrivere questo secondo numero *a destra* di (1), ma un pò in alto, ossìa in testa, ed in carattere più minuto.

Con questa nuova convenzione in luogo degli ultimi simboli si avranno respettivamente i seguenti più concisi

$$(1)^2,\ (1)^3,\ (1)^4,\ (1)^5, \ldots$$

i quali denoteranno respettivamente la *seconda*, *terza*, *quarta*, *quinta*, . . potenza di (1).

Per denotar poi, che (1) è potenza *prima* di se medesimo (Tema primo, pag. 54), gli si scriverà in testa 1. Così $(1)^1$ significherà lo stesso che (1).

È utile fermarsi quì per un momento a far vedere, che una potenza di un prodotto di fattori si può ottenere col fare il prodotto delle potenze medesime di questi fattori.

Così per esempio la seconda potenza, od il quadrato del prodotto (1)(2), sarà $(1)^2.(2)^2$.

Infatti per tutto quello, che in addietro (Tema primo, pag. 46 e seg.), e quì sopra si è detto, è facil vedere, che per seconda potenza di (1)(2) si può successivamente scrivere

$(1)(2)\times(1)(2)$, $(1)\times(2)\times(1)(2)$, $(1)(2)\times(1)\times(2)$, $(1)\times(2)\times(1)\times(2)$, $(1)\times(1)\times(2)\times(2)$, $(1)(1)\times(2)\times(2)$, $(2)\times(2)\times(1)(1)$, $(2)(2)\times(1)(1)$, $(1)(1)\times(2)(2)$, e finalmente $(1)^2.\,(2)^2$.

È facil persuadersi, che un processo simile di calcolo hà luogo anche per la formazione di una potenza qualunque di un prodotto di quanti mai si voglian fattori. Onde si trae la importante conseguenza

« Come una potenza qualunque di un pro-
« dotto di fattori è il prodotto delle potenze
« medesime di questi fattori, così viceversa
« una radice di un nome qualunque di un pro-
« dotto di fattori si può riguardare come il
« prodotto delle radici del medesimo nome di
« questi fattori »

Perciò, essendo per convenzione

$(1)^2$ *eguale a* $(1)(1)$, $(1)^3$ *eguale a* $(1)(1)(1)$.....,

estraendo la radice respettivamente quadrata, cubica,... sarà

(1) *eguale a* $\sqrt{(1)}\cdot\sqrt{(1)}$ *eguale a* $\sqrt[3]{(1)}\cdot\sqrt[3]{(1)}\cdot\sqrt[3]{(1)}$ *eguale a*....,

e però il numero (1) *potrà decomporsi per moltiplicazione* in quanti mai si vogliano radicali uguali, che abbiano tutti per base (1) e per indice comune il loro numero, dimodochè all' occorrenza si potrà supporre un tal numero *grande quanto mai si vorrà ad arbitrio e nel medesimo tempo un Dividendo perfetto, a guisa di numero sottinteso* (Tema terzo, pag. 5, 8).

Essendoci quì occorso rammentare il *numero sottinteso* si può avvertire, che sebbene del numero generale (1), considerato come concreto, si possa concepire una parte aliquota qualunque, per la ragione, che il numero sottinteso, a cui esso si riferisce come fattore di un prodotto, si suppone un *Dividendo perfetto* (Tema terzo, pag. 10), pure nel caso di voler concepire (1) come una *Potenza perfetta*, quando non fosse tale per se stesso, non ci gioverebbe la supposizione, che fosse potenza perfetta il medesimo numero sottinteso, perchè in un prodotto, il quale debba esser potenza perfetta, bisogna che sia tale, come quì sopra si è visto, anche ciascuno de' suoi fattori per se stesso.

Del resto i numeri intieri scritti *a sinistra* di (1) diconsi *Coefficienti* di (1), inquantochè son come *co-fattori* di un prodotto, e quelli scritti *in testa* ad (1), inquantochè *espongono* il grado della potenza di (1), diconsi *Esponenti*.

Il numero poi (1) dicesi la *Base della potenza*.

5. Volendo per digressione notare alcune cose intorno alle potenze per servirsene all'uopo, siccome ci occorrerà spesso usare, come quì sopra, la frase *è eguale*, così per maggior brevità di scrittura gli sostituiremo il doppio segno $=$, interposto ai simboli o numeri, trai quali dovrà *sussistere* uguaglianza.

Con questa convenzione in luogo delle precedenti espressioni scriveremo queste altre

$$(1)^2=(1)(1),(1)^3=(1)(1)(1),\ldots;$$

$$(1)=\sqrt{(1)}.\sqrt{(1)}=\sqrt[3]{(1)}.\sqrt[3]{(1)}.\sqrt[3]{(1)}=\ldots\ldots,$$

dalle prime delle quali è facil persuadersi, che se ne possono trarre per esempio anche le seguenti

$$\sqrt[3]{(1)^2}=\sqrt[3]{(1)}.\sqrt[3]{(1)},\sqrt{(1)^3}=\sqrt{(1)}.\sqrt{(1)}.\sqrt{(1)},\ldots.$$

Perciò, chiamandosi *semplici* quei radicali, che hanno per base (1), e *composti* quelli, che hanno per base una potenza qualunque di (1), si dice

« Che un radicale composto si decompone per « moltiplicazione in tanti radicali semplici del « medesimo indice, quante unità contiene l' e- « sponente della sua base »

Coteste espressioni sogliono chiamarsi *Eguaglianze*, e ciò che in esse trovasi scritto a sinistra del segno =, dicesi *Primo Membro*, e ciò ch' è a destra, dicesi *Secondo Membro*. È sommamente utile il rendersi familiare cotesta maniera di scrivere *simbolica*.

Adesso noi diciamo, che sussiste per un esempio la Eguaglianza

$$(1)^2\times(1)^3=(1)^5,$$

ove l' esponente 5 di (1) nel secondo membro è la *somma* degli esponenti 2 e 3 di (1) nel primo.

Infatti per quello, che sappiamo,

$$(1)^2\times(1)^3=(1)\times(1)\times(1)^3=(1)^3\times(1)\times(1)=$$
$$(1)\times(1)\times(1)\times(1)\times(1)=(1)(1)(1)(1)(1)=(1)^5.$$

Nello stesso modo per un' altro esempio si dimostrerebbe, che

$$(1)^2\times(1)^3\times(1)^5=(1)^{10},$$

ove l' esponente 10 di (1) nel secondo membro è pure *la somma* degli esponenti 2, 3, 5, di di (1) nel primo.

E così di seguito.

Però, chiamandosi *simili* le potenze della stessa base, qualunque sia l' esponente, si dice generalmente

« Che il prodotto di più potenze simili è
« una nuova potenza simile, di cui l' esponen-
« te è la *somma* degli esponenti di quelle »
od in altri termini

« Il prodotto di più potenze simili si fà col
« *sommare* gli esponenti »
d' onde si conclude generalmente

« In quanti modi un numero intiero dato può
« decomporsi per addizione in altri numeri intieri,
« trà loro uguali o nò, in altrettanti una potenza

« di una base qualunque, che abbia per espo-
« nente il primo numero, può decomporsi per
« moltiplicazione in potenze simili, che abbiano
« per esponenti i secondi numeri ».

Nel caso particolare, in cui gli esponenti delle potenze simili, che si moltiplicano, fossero trà loro uguali (nel qual caso si eleverebbe potenza a potenza), siccome la loro somma sarebbe il prodotto di uno pel numero di tutti, così si dice

« Che per elevare una potenza a potenza si
« moltiplica il di lei esponente per quello *del*
« *grado*, a cui vuolsi elevare »

Per esempio la *terza* potenza di $(1)^2$ sarà $(1)^{3.2}$, ossia $(1)^6$

Dividendo dunque (quando è possibile esattamente) l' esponente di una potenza per un numero intiero, il resultato, ossìa la nuova potenza, sarà viceversa la radice della prima del nome o grado denotato da cotesto numero.

Così $(1)^3$, o $(1)^2$ sarà la radice quadrata o cubica respettiva di $(1)^6$, mentre $(1)^1$, ossìa (1), n' è la sesta. Osservando, che questa ultima radice è anche la quadrata di $(1)^2$, o la cubica di $(1)^3$, si vede, che, ponendo $(1)^5$ sotto la forma $(1)^{2.3}$, si può ottener la sua radice *sesta* coll' estrarne prima la *quadrata* e poi la *cubica*; o viceversa.

Riunendo la precedente conseguenza con quella di sopra (pag. 54) si hà un mezzo per *ridurre*, quando è possibile, i radicali alla loro più semplice espressione.

Avendosi per esempio il radicale cubico $\sqrt[3]{(1)^5}$, se si stabilisce la eguaglianza

$$(1)^5=(1)^3\cdot(1)^2,$$

e poi se n' estrae da ambi i membri la radice cubica, resulterà

$$\sqrt[3]{(1)^5}=(1)\cdot\sqrt[3]{(1)^2}.$$

Parimente avendosi il radicale quadrato $\sqrt{(1)^5}$, se si stabilisce la eguaglianza

$$(1)^5=(1)^4\cdot(1),$$

e poi se n' estrae la radice quadrata, si avrà

$$\sqrt{(1)^5}=(1)^2\cdot\sqrt{(1)}.$$

Generalmente, quando la base di un radicale hà un' esponente superiore al dì lui indice, dividendo quello per questo, e dando alla base per esponente prima il quoziente, e poi il resto, il prodotto della prima potenza, che ne risulta, pel radicale del medesimo nome, che abbia per base la seconda, rappresenterà il proposto radicale *ridotto* alla sua più semplice espressione.

In questa operazione consiste la *Estrazione* dal segno radicale dei fattori della sua base.

Nel caso di una base particolare, di cui qualche fattore sia potenza perfetta, questo si trarrà fuori dal segno radicale, nel modo che segue

Avendosi per es. il radicale quadrato o cubico $\sqrt{5880}$, $\sqrt[3]{5880}$, siccome $5880 = 7^2.2^3.3.5 = 7^2.2^2.2.3.5$ (Tema terzo, pag. 24), sarà $\sqrt{5880} = 7.2.\sqrt{2.3.5} = 14.\sqrt{30}$, e $\sqrt[3]{5880} = 2.\sqrt[3]{7^2.3.5} = 2.\sqrt[3]{735}$.

Nello stesso modo avendosi per esempio il radicale cubico $\sqrt[3]{\frac{24}{1715}}$, siccome $24=2^3.3; 1715= 7^3.5$, e però $\frac{24}{1715} = \frac{2^3}{7^3} \cdot \frac{3}{5}$, sarà $\sqrt[3]{\frac{24}{1715}} = \frac{2}{7} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$ (ivi, pag. 73)

Un numero intiero o fratto, fuori del segno radicale a sinistra, dicesi *Coefficiente* del radicale a destra, ove qualche volta il punto interposto si tralascia.

Del resto, come la Moltiplicazione di due potenze simili si fà col *sommare* gli esponenti di esse, così la Divisione di una potenza per un' altra simile *di esponente più piccolo* si farà col *sottrarre* dall' esponente della prima quello della seconda. Il quoziente della divisione per esempio di $(1)^5$ per $(1)^2$ sarà $(1)^3$, ove l' esponente 3 è la *differenza* de' due esponenti 5 e 2.

Volendosi poi tener ferma la medesima regola anche nel caso particolare, in cui i due esponenti fossero trà loro uguali, siccome allora non vi sarebbe trà loro *differenza alcuna*, così, denotandosi questa circostanza colla cifra o, resulterebbe per quoziente della divisione il simbolo $(1)^0$, il quale dovrebbe interpetrarsi come *equivalente ad* 1; ciocchè si esprime per mezzo della eguaglianza

$$(1)^0 = 1,$$

giacchè è chiaro, che il quoziente esatto della divisione di una potenza qualunque per se stessa non può essere che la unità.

6. Ripigliamo adesso la considerazione dei Radicali; e siccome in seguito ci occorrerà anche usare spesso la frase *è maggiore*, oppure la frase *è minore*, egualmentechè la frase *è eguale*, avendo a questa già sostituiti i due segni orizzontali $=$, così inclinando l'uno sull' altro, alla prima di quelle sostituiremo per maggior brevità di scrittura il segno $>$, ed alla seconda il segno $<$, scrivendo come si deve, il numero ch'è, o si reputa minore, a destra del primo od a sinistra del secondo segno; e viceversa il maggiore. Così per denotare per esempio, che 5 *è maggiore* di 3, scriveremo $5>3$, e per denotare che 3 *è minore* di 5, scriveremo $3 < 5$.

Posto ciò, considerando quei Radicali composti, nei quali la base è una potenza qualunque del numero generale (1), ecco alcune delle loro principali proprietà.

« 1ª Secondochè l' esponente della base di « un Radicale proposto è minore o maggiore « dell' indice di lui, il valor numerico di un « tal Radicale riesce pure respettivamente mi- « nore o maggiore di quello di (1), se $(1)>1$; « ma se $(1)<1$, riescirà al contrario mag- « giore o minore »

Infatti decomponendosi il radicale proposto per moltiplicazione in tanti radicali semplici del suo indice, quante unità contiene l'esponente della sua base (pag. 53), ed il numero generale (1) potendosi pure decomporre per moltiplicazione in tanti de' medesimi radicali semplici, quante unità contiene il medesimo indice (pag. 51), si vede subito, che, secondochè cotesto esponente è minore o maggiore di cotesto indice, i fattori semplici del radicale proposto saranno meno o più di quelli di (1). Ma il valor numerico di un prodotto riesce evidentemente più piccolo o più grande di quello, che ha più o meno fattori compagni di lui, se il valore di ciascun fattore è superiore a quello di 1; e viceversa riesce più grande o più piccolo, se il valore di ciascuu fattore è inferiore a quello di 1 (Tema terzo, pag. 66). Ora, come si è già di sopra osservato (pag. 26), secondochè (1) hà un valore superiore od inferiore a quello di 1, anche un radicale semplice di (1) di un indice qualunque hà pure respettivamente un valore superiore od inferiore a quello di 1. Dunque ec.

Il radicale per es. $\sqrt[3]{(1)^2}$ decomponendosi nei *due* fattori $\sqrt[3]{(1)}.\sqrt[3]{(1)}$, ed (1) decomponendosi nei *trè* $\sqrt[3]{(1)}.\sqrt[3]{(1)}.\sqrt[3]{(1)}$, se $(1)>1$, siccome anche $\sqrt[3]{(1)}>1$, il primo prodotto riesce più piccolo del secondo, e però $\sqrt[3]{(1)^2}<(1)$; ma se $(1)<1$, siccome anche $\sqrt[3]{(1)}<1$, il primo prodotto riescirà più grande del secondo, e però $\sqrt[3]{(1)^2}>(1)$.

Il radicale poi per esempio $\sqrt{(1)^3}$ decomponendosi nei *trè* fàttori $\sqrt{(1)}.\sqrt{(1)}.\sqrt{(1)}$, ed (1) nei *due* $\sqrt{(1)}.\sqrt{(1)}$, se $(1)>1$, siccome anche $\sqrt{(1)}>1$, il primo prodotto riesce più grande del secondo, e però $\sqrt{(1)^3}>(1)$; ma se $(1)<1$, siccome anche $\sqrt{(1)}<1$, il primo prodotto riescirà più piccolo del secondo, e però $\sqrt{(1)^3}<(1)$.

« 2ª Secondochè cresce o diminuisce l' espo-
« nente della base di un radicale, restando fis-
« so, o *costante*, l' indice, il di lui valor nu-
« merico pure respettivamente cresce o dimi-
« nuisce, se $(1)>1$; ma se $(1)<1$, al contrario
« diminuirà o crescerà.

« Viceversa, secondochè cresce o diminuisce
« l'indice di un radicale, restando fisso, o *co-*
« *stante*, l'esponente della sua base, il di lui
« valor numerico respettivamente diminuisce o
« cresce, se $(1) > 1$; ma se $(1) < 1$, al contrario
« crescerà o diminuirà »

Ed infatti, imaginandosi il proposto radicale decomposto per moltiplicazione in radicali semplici, nel primo caso crescerà o diminuirà il loro numero restando fisso, o *costante*, il loro indice comune; e nel secondo crescerà o diminuirà quest' indice, restando fisso, o *costante*, il loro numero. Ora, se $(1) > 1$, siccome lo è anche un radicale qualunque semplice di (1), è evidente nel primo caso, che il valor del prodotto sarà più o meno grande, secondochè è composto di più o meno fattori, cioè crescerà o diminuirà; ma se $(1) < 1$, siccome lo è anche un radicale qualunque semplice di (1), il valore di cotesto prodotto riescirà più o meno piccolo, cioè diminuirà o crescerà.

Il radicale per esempio $\sqrt[3]{(1)^4}$ decomponendosi in *quattro* fattori, ed il radicale $\sqrt[3]{(1)^5}$ in *cinque*, uguali ciascuno a $\sqrt[3]{(1)}$, si vede subito, che se $(1) > 1$, siccome anche $\sqrt[3]{(1)} > 1$, il valore del secondo radicale supererà quello del primo; ma se $(1)<1$, siccome anche $\sqrt[3]{(1)}<1$, il valore del primo radicale supererà quello del secondo.

Nel secondo caso, siccome (1) si decompone per moltiplicazione in più o meno radicali semplici, secondochè è respettivamente più o meno grande il loro indice comune, si vede, che, se $(1)>1$, il valor numerico di uno di questi radicali, ed in conseguenza anche quello di un numero *costante* dei medesimi, diminuisce o cresce, secondochè cresce o diminuisce respettivamente il loro indice, ed al contrario cotesto valore cresce o diminuisce, se $(1)<1$.

Il valore per esempio del radicale $\sqrt{(1)}$ sarà superiore a quello di $\sqrt[3]{(1)}$, se $(1)>1$; ma, se $(1)<1$, sarà inferiore; perchè (1) decomponendosi in $\sqrt{(1)}.\sqrt{(1)}$, egualmentechè in $\sqrt[3]{(1)}.\sqrt[3]{(1)}.\sqrt[3]{(1)}$, quando $(1)>1$, essendo anche $\sqrt{(1)}>1$, e $\sqrt[3]{(1)}>1$, bisogna, che uno dei *due* primi fattori superi uno dei *trè* secondi; e quando $(1)<1$, essendo anche $\sqrt{(1)}<1$, e $\sqrt[3]{(1)}<1$, bisogna che uno dei *trè* secondi superi uno dei *due* primi.

Se l'esponente della base di un radicale, restando *costante* l'indice, crescesse o diminuisse in modo da divenire un multiplo o submultiplo (esatto, quando è possibile) di se stesso, il nuovo radicale si decomporrebbe per moltiplicazione in un numero di radicali semplici parimente multiplo o submultiplo del numero di quelli, nei quali si decompone il proposto, e del medesimo indice di lui; e se inoltre anche quest' indice diventasse contemporaneamente un medesimo multiplo o submultiplo (esatto, quando è possibile) di se stesso, il nuovo radicale, in cui l' esponente della base, egualmentechè il suo indice, sarebbe respettivamente un medesimo multiplo o submultiplo di quello del primo, si decomporrebbe per moltiplicazione in un numero di radicali semplici, multiplo o submultiplo del numero di quelli, nei quali si decompone il primo, e nello stesso tempo di un' indice parimente multiplo o submultiplo medesimo dell' indice di lui. Ora è facil vedere, che il valore di quest' ultimo prodotto riesce le stesso di quello, in cui si decompone primitivamente il radicale proposto.

Infatti essendo per esempio $\sqrt{(1)^3}$, o $\sqrt[4]{(1)^6}$ il radicale proposto, mentre $\sqrt{(1)^3}$ si decompone in $\sqrt{(1)}.\sqrt{(1)}.\sqrt{(1)}$, $\sqrt[4]{(1)^6}$ si decompone in $\sqrt[4]{(1)}.\sqrt[4]{(1)}\sqrt[4]{(1)}.\sqrt[4]{(1)}\sqrt[4]{(1)}.\sqrt[4]{(1)}$; ma dall' essere

$(1) = \sqrt{(1)}.\sqrt{(1)} = \sqrt[4]{(1)}.\sqrt[4]{(1)}.\sqrt[4]{(1)}.\sqrt[4]{(1)}$, resulta $\sqrt{(1)} = \sqrt[4]{(1)}.\sqrt[4]{(1)}.$; dunque $\sqrt[4]{(1)^6} = \sqrt{(1)^3}$.

Quindi segue quest' altra general proprietà dei Radicali

« 3ª Moltiplicando, o dividendo (se si può
« esattamente), l' esponente della base di un
« Radicale, egualmentechè l' indice, per uno
« stesso numero, il di lui valore non si altera »

In virtù di questa ultima proprietà più Radicali d' indice diverso si possono *ridur* tutti ad aver l' indice stesso, senza che il loro respettivo valore si alteri .

Denotando al solito (1), (2), (3), (4),... dei *numeri generali*, siano per esempio proposti i seguenti radicali

$$\sqrt{(1)}, \sqrt[3]{(2)^2}, \sqrt[4]{(3)^3}, \sqrt[5]{(4)^4}, \ldots.$$

ove i numeri particolari scritti in testa ai generali sono pure al solito esponenti delle basi .

Per cotesta proprietà i primi due radicali, senz' alterarsi il loro valore, si cangiano nei due seguenti respettivamente

$$\sqrt[3.2]{(1)^{3.}}, \sqrt[2.3]{(2)^{2.2}}$$

I trè $\sqrt[3.2]{(1)^3}, \sqrt[2.3]{(2)^{2.2}}, \sqrt[4]{(3)^3}$ nei trè seguenti respettivamente

$$\sqrt[4.3.2]{(1)^{4.3}}, \sqrt[4.2.3]{(2)^{4.2.2}}, \sqrt[2.3.4]{(3)^{2.3.3}}$$

E così di seguito ,

D' onde si conclude

« Che più radicali *d' indice o specie diversa* « si riducono tutti alla *specie* medesima col « moltiplicare respettivamente l'indice di ognu- « no pel prodotto di tutti gli altri, purchè per « questo stesso prodotto si moltiplichi contem- « poraneamente l' esponente di ciascuna respet- « tiva base »

Si capisce bene, che cercando, come per le frazioni (Tema terzo, pag. 22), il numero più piccolo possibile, quando ciò hà luogo, capace di esser diviso esattamente per ciascun' indice, se per ciascun quoziente, che ne risulta, si moltiplica l' esponente di ciascuna base respettiva, si avranno i radicali *trasformati* più semplici, che avranno per indice *comune* cotesto numero più piccolo. Così il primo per esempio de' due radicali $\sqrt{(1)^3}$,$\sqrt[4]{(2)^5}$ si *trasforma* nell' equivalente $\sqrt[4]{(1)^6}$ del medesimo indice del secondo.

7. Passando adesso a dir qualche cosa intorno alle Operazioni sù i Radicali, e parlando congiuntamente di ciascuna operazione e della sua inversa, noi ci limiteremo a notare soltanto ciò, che segue.

1.° Quanto all' *Addizione* dei Radicali, supponendoli ridotti tutti al medesimo indice, nel caso particolare, che le basi riescano tutte trà loro uguali, noi scriveremo a sinistra di uno di essi, a guisa di *coefficiente*, il numero di tutti. Così per *somma* per esempio de' due radicali $\sqrt{2}, \sqrt{2}$ scriveremo $2\sqrt{2}$.

Se i radicali da addizionarsi, *d' indice* e *di base medesima*, avessero già dei coefficienti intieri o fratti, la loro *somma* si otterrebbe col dare ad uno di essi per coefficiente la somma di tutti i coefficienti. Così per somma per esempio dei trè radicali $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, al primo dei quali si sottintende per coefficiente 1, resulterà $9\sqrt{2}$; e per somma dei trè radicali, per esempio $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}\sqrt{2}$, $\frac{2}{5}\sqrt{2}$ si avrà $\frac{37}{30}\sqrt{2}$, ove il coefficiente $\frac{37}{30}$ è la somma dei trè $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$.

Quanto alla *Sottrazioue* di un radicale con un certo coefficiente da un' altro radicale del medesimo indice e della medesima base, ma con un coefficiente più grande, è chiaro, che essa si eseguirà col sottrarre coefficiente da coefficiente, e dando il resto per coefficiente ad uno di cotesti radicali. Così, se dal radicale per esempio $5\sqrt{2}$ dovrà sottrarsi il radicale $4\sqrt{2}$, avremo per *resto* o *differenza* il radicale $1\sqrt{2}$, oppure $\sqrt{2}$.

Parimente la sottrazione per esempio di $\frac{1}{3}\sqrt[3]{7}$, da $\frac{2}{5}\sqrt[3]{7}$, ci darà per resto $\frac{1}{15}\sqrt[3]{7}$.

Dell' Addizione e Sottrazione di Radicali, che ridotti alla medesima specie ed alla loro più semplice espressione non acquistassero la medesima base, quì non se ne parla.

2°. Passando alla *Moltiplicazione* dei Radicali di basi qualunque, ma dello stesso indice, se si osserva, che prendendo da ambi i membri della eguaglianza

$$(1)\times(2)\times(3)\,..=(1)(2)(3)\,...$$

una radice qualunque, per esempio la quadrata, ne resulta quest' altra

$$\sqrt{(1)}\times\sqrt{(2)}\times\sqrt{(3)}\,..=\sqrt{(1)(2)(3)\,...},$$

si vede ch' essa si eseguisce col moltiplicare trà loro le basi, ed *affettando* il prodotto con un segno radicale dell' indice stesso, di cui si prolunga orizzontalmente il secondo ramo per cuoprirne la base.

Se i radicali proposti avessero indici diversi, è facil persuadersi per ciò che precede, che, senza stare a ridurli prima all' indice stesso, il loro *prodotto* si farà immediatamente collo scrivere un segno radicale con un' indice il più piccolo possibile, capace di esser diviso esattamente per ciascuno di quelli; e poi, per ciascun quoziente respettivo moltiplicando l'esponente di ciascuna base corrispondente, col dare il prodotto di tutte le nuove basi per base al segno radicale scritto.

Così essendo proposti per esempio i trè radicali $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, siccome 12 è il numero più piccolo divisibile esattamente per gl' indici 2, 3, 4, per ciascuno de' respettivi quozienti 6, 4, 3 moltiplicando l'esponente sottinteso 1 di ciascuna delle respettive basi 2, 3, 4 di cotesti radicali, al segno radicale $\sqrt[12]{}$ si darà per base il prodotto $2.^6\, 3.^4\, 4^3$, ossia 331776; e però si avrà

$$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[4]{4}=\sqrt[12]{331776}$$

Se avessim' osservato, che $\sqrt[4]{4}=\sqrt[2.2]{2^2}=\sqrt{2}$, e che $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\sqrt{2^2}=2$, pel prodotto di quei trè radicali avremmo ottenuto il resultato più semplice $2\sqrt[3]{3}$.

Del resto, quando i radicali proposti avessero dei coefficienti numerici, il prodotto di questi si darebbe per coefficiente al radicale precedente che si fosse ottenuto per prodotto, astrazion fatta da cotesti coefficienti.

Quanto alla *Divisione* dei Radicali, siccome questa si ravvisa come una operazione inversa alla Moltiplicazione, si concepisce, che, quando il radicale divisore siasi ridotto allo stesso indice del radicale dividendo, essa si farà col dividere sotto il segno radicale la base di questo per la base di quello.

Così il *quoziente*, per esempio di $\sqrt{5}$ diviso per $\sqrt{7}$ sarà $\sqrt{\frac{5}{7}}$; e quello di $\sqrt{5}$ diviso per $\sqrt[6]{7}$ sarebbe $\sqrt[6]{\frac{5^3}{7^2}}$, ossia $\sqrt[6]{\frac{125}{49}}$.

3.° Venendo alla *Elevazione* a potenze dei Radicali, se si osserva come sopra (pag. 53) che per es. $\sqrt[5]{(1)^3}=\sqrt[5]{(1)}\cdot\sqrt[5]{(1)}\cdot\sqrt[5]{(1)}$, $\sqrt[5]{(1)^6}=\sqrt[5]{(1)^{3.2}}=\sqrt[5]{(1)^2}\cdot\sqrt[5]{(1)^2}\cdot\sqrt[5]{(1)^2}$, e che il prodotto $\sqrt[5]{(1)}\cdot\sqrt[5]{(1)}\cdot\sqrt[5]{(1)}$ è la *terza* potenza di $\sqrt[5]{(1)}$, come il prodotto $\sqrt[5]{2)^2}\cdot\sqrt[5]{(3)^2}\cdot\sqrt[5]{(4)^2}$ lo è di $\sqrt[5]{(1)^2}$, si vede che basta elevare a cotesta potenza medesima le loro basi.

Finalmente quanto alla *Estrazione* delle Radici dai Radicali, da ciò che fin quì abbiamo detto, è facil rilevare, che basterà eseguirla sulle basi, quando è possibile esattamente; oppure moltiplicare l' indice del segno radicale pel grado della radice, che vuolsi estrarre, quando ci si contenti soltanto di notarla.

§. II.

Traduzione approssimativa dei Radicali in decimali; e segnatamente dei Radicali quadrati e cubici.

1. Riguardando un Radicale come il *simbolo* della radice esatta della sua base (pag. 47), dopo aver tradotta questa in un numero *indefinito* di cifre decimali (pag. 13, 27), nella operazione parimente *indefinita*, che attualmente si fà sul resultato per ottener le successive cifre di cotesta radice, a tenore di quanto precedentemente si è detto (pag. 42), consiste ciò, che noi intendiamo per *Traduzione approssimativa dei Radicali in decimali*.

Noi non sapremmo quì assegnare alcun processo generale pei Radicali di qualunque nome, od indice; ma limitandoci soltanto ai Radicali *quadrati* e *cubici*, ci contenteremo per i primi di darne un saggio sull'esempio semplicissimo di $\sqrt{2}$ (p. 45), ove di seguito alla base 2 si sottintendono scritti quanti mai *ambi* di zeri si vogliono, separati da essa con una virgola

Ecco il tipo del calcolo

1, 4 1 4 2 1 3 5 6 2 3 7 3 . . .

2
10.0
40.0
11 90.0
60 40.0
3 83 60.0
1 00 75 90.0
15 90 63 10.0
1 76 41 77 50.0
6 71 21 26 40.0
1 05 52 72 15 60.0
20 67 44 01 87 10.0
87 54 11 99 83 10.0
2 68 83 86 08 87 1
. . . .

ove fermandosi al tredicesimo resto resultano dodici cifre alla radice dopo la virgola, e però si ottiene il valore del radicale $\sqrt{2}$ proposto, approssimato *per difetto* a meno di un *trillionesimo*. Aumentando poi l' ultima cifra di una unità si otterrà un valore approssimato a meno di un *trillionesimo per eccesso*.

2. Per dare anche un saggio di approssimazione al valore di un radicale cubico noi non crediamo poter far meglio, che riprodurre il *Cenno* della operazione dato (anno 1838) dal Sig. *Dot-*

tor Cesana, già *Nostro Scolare*, sull'esempio di $\sqrt[3]{45270270627}$, già da noi trattato (Tema secondo, pag. 53), ove di seguito alla base si sottintendono scritti quanti mai *terni* di zeri si vogliono, separati da essa con una virgola.

Ecco il tipo del calcolo.

$3564,00001267.... = \sqrt[3]{45.270.270.627}$

9	182.70
9×3	23 952.70
27	1 522 546.27
45	4 830.000.000.000.000.00
25	1 019 371 189 307 999 990.00
3175×5	257 245 424 603 519 982 720.00
3675	28 607 695 025 380 779 996 240.00
35	1 933 293 236 249 991 660 988 37
280	
36	
373836×6	
380208	
4272	
16	
38063536×4	
3810628800000000	
106920000	
1	
3810628810692000001×1	
3810628821384000003	
2138400006	
4	
38106288235224000364×2	
38106288256608000432	
3564000012	
28512000096	
36	
38106288263023200045396×6	
38106288269438400047628	
71280000252	
35640000126	
49	
381062882701868404789309×7	

. . . .

Eccone poi il dettaglio colle parole stesse dell' Autore, che sarà facile intendere per ciò, che precede.

« 1.° Destinata in primo luogo, come si vede, la parte destra del foglio pel numero proposto e pei successivi resti, ed indicata la estrazione pel segno radicale cubico $\sqrt[3]{}$, tiro nella sinistra una linea orizzontale colla intenzione di registrare al di sopra di lei le cifre della radice, che ad una per volta si scuopriranno, incominciando da quella dell' ordine più elevato, e quindi situo alla destra della suddetta linea un poco più in alto le due linette = come segno della eguaglianza, che sarà per resultare in conseguenza del calcolo, che si eseguirà per intiero, e senza interruzione al di sotto della medesima linea in direzione verticale.

« 2.° Decomposto al solito il numero in classi ternarie *per mezzo di punti*, e *non di virgole*, e trovata la cifra 3 per la radice del massimo cubo 27 contenuto in 45 (ultima classe in questo numero, composta di due sole cifre, e che potrebbe in un' altro essere anche di una cifra sola), la scrivo sulla linea orizzontale, come prima della radice addimandata.

« 3.° Scrivo due volte il suo quadrato 9 sotto la linea, e la seconda volta ne accenno il prodotto, col segno $\times$, per la stessa cifra 3, che mentalmente eseguito, costituendo il suo cubo, sottraggo da 45, e presso al resto 18 scrivo la contigua classe 270, di cui separo con un punto le cifre 70.

« 4.° Sommo il secondo quadrato 9, come se presso a lui non fosse scritto $\times 3$, col doppio del primo, ed ottengo in 27 il triplo del quadrato del 3, per cui divido il numero 182 alla sinistra del punto, e riconosciuto essere il quoziente 6 una cifra troppo grande per rappresentare la seconda della radice, ed essere 5 la giusta, scrivo questa accanto alla prima 3.

« 5.° Scrivo a scala sotto al 27 (triplo del quadrato di 3)
« il 45 (triplo del prodotto della medesima cifra 3 per la
« seconda 5, ovvero prodotto di 3 per 15, triplo di 5), ed a
« scala pure sotto il 45, il 25 (quadrato di 5), e fatta l' ad-
« dizioue, accenno la moltiplicazione della som-
« ma 3175 per la medesima suddetta cifra 5,
« ch' eseguita, e sottrattone il prodotto mental-
« mente del numero totale 18270 (come si fà
« nella divisione ordinaria di un numero di più
« cifre per un numero di più cifre) sommini-
« stra il secondo resto 2395, allato del quale
« scrivo la classe contigua 270, di cui separo le cifre estreme
« 70 con un punto. E quì si avverta, che riuscendomi penoso
« il far la prima di tali moltiplicazioni, cioè quella della radi-
« ce parziale trovata pel triplo della nuova cifra, nella gnisa
« di quelle, in cui il moltiplicatore è espresso per una sola
« cifra, la eseguisco in due volte: così per esempio nella sus-
« seguente analoga operazione in luogo di scri-
« vere a scala sotto al 3665 il 630 (prodotto
« di 35 per 18, triplo di 6), scrivo in colon
« na il 35 (prodotto di 35 per 1), e sotto al
« 35 a scala il 280 (prodotto di 35 per 8).

27
. . .
45
25
3175 × 5

« 6.° Fò l'addizione della suddetta somma
« 3175, come se presso a lei non fosse scrit-
« to ×5, con 25 (quadrato di 5), di cui si raddoppiano le
« cifre, quasi che s' incontrasse scritto due volte, e con 45
« (prodotto di 3 per 15) escludendo 27 (triplo del quadra-
« to di 3), che per maggior precauzione è disgiunto dai detti
« numeri per una lineetta orizzontale punteggiata, ed ottengo
« nella somma 3675 il triplo del quadrato di 35, per cui di-
« vido il numero 23952 alla sinistra del punto, e verificato il
« quoziente 6, lo scrivo accanto al 5, come terza cifra della ra-
« dice . E così di seguito come riscontrasi nel precedente pro-
« spetto della operazione, spinta fino alla ottava cifra decima-
« le inclusive .

3675
. . . .
35
280
36
373836 × 6

« Termino ora coll' osservare, che il calcolo sotto quella

« forma procede dal principio alla fine per due sole continua-
« te file di operazioni non interrotte mai dal bisogno di fare a
« parte alcun computo ausiliare, se non che talvolta riscon-
« trandosi falso il quoziente che si sottopone alla prova nella
« fila sinistra, dovranno cancellarsi i numeri a lei inservienti,
« eccettuato il triplo del quadrato della radice parziale tro-
« vata. e comporsi i nuovi analoghi, ed attenenti al quoziente
« stesso diminuito di una unità; maoltrechè può quasi sem-
« pre evitarsi un tal caso in virtù di una certa pratica, che sia-
« si già coll' esercizio acquistata, il quoziente si ritrova pres-
« sochè costantemente esatto al di là della quarta, o quinta
« cifra della radice, com' è facile convincersi mediante l' in-
« spezione della fila sinistra stessa ».

PREZZO

Una Lira